

结构动力方程的精细积分 - FFT 方法*

张文志, 富明慧, 刘祚秋

(中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 离散结构动力方程为差分方程, 并假设始、末时刻位移已知, 将初值问题形式上转化为边值问题, 然后利用快速傅立叶变换 (FFT) 进行求解, 从而得到非齐次结构动力方程的一个数值特解。将该数值特解与通过精细积分法求得的齐次方程通解相结合, 建立了求解结构动力方程的一种新方法。该方法具有较高的精度和计算效率, 算例的数值结果证明了本文方法的有效性。

关键词: 结构动力方程; 精细积分法; 差分方程; 快速傅立叶变换

中图分类号: O321 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 06-0012-04

钟万勰提出的精细积分法^[1-2]用于求解线性定常结构动力方程, 可得到逼近精确解的数值结果。文献^[3-4]将精细积分法作了有效的推广。但对于非齐次结构动力方程, 会遇到矩阵求逆的问题, 虽然矩阵求逆法^[5-6]简便易行, 但由于矩阵的逆有可能不稳定甚至不存在, 在一定程度上限制了精细积分法的应用范围。林家浩等^[7]将非齐次项化为 Fourier 级数, 虽然避免了对方程的系数矩阵求逆, 但需要对另外的矩阵求逆。顾元宪等^[8-9]提出了对结构方程增维的方法, 这种方法无需矩阵求逆, 但其适用范围有限。汪梦甫等^[10]提出了一种利用数值积分求解非齐次方程特解的方法, 但其特解实际上要达到或者接近通解的精度几乎是不可能的。富明慧等^[11]提出了一种广义精细积分法, 对于非齐次项为多项式和指数函数的情况, 也能实现特解的精细积分, 且不需矩阵求逆, 但对于任意形式的荷载并不适用。

本文利用快速傅立叶变换法求出非齐次结构动力方程的数值特解, 并将其与用精细积分法求得的齐次方程通解结合起来, 建立了一种精度好、效率高且普遍适用的结构动力分析方法。

1 结构动力方程的解答

包含 m 个自由度的结构动力方程及初始条件为

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(t) \quad (1)$$

$$X(0) = X_0, K\dot{X}(0) = \dot{X}_0 \quad (2)$$

其中 M 、 C 、 K 为 m 阶矩阵, $F(t)$ 为荷载项, X 是结点位移。作变换

$$p = M\dot{X} + CX/2 \quad (3)$$

方程 (1) 可改写为

$$\dot{v} = Hv + r \quad (4)$$

其中

$$v = \begin{pmatrix} X \\ p \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} \quad (5)$$
$$H = \begin{pmatrix} -M^{-1}C/2 & M^{-1} \\ CM^{-1}C/4 - K & -CM^{-1}/2 \end{pmatrix}$$

方程 (4) 的解可表示为

$$v(t) = e^{Ht}v_0 + v^* \quad (6)$$

其中 $e^{Ht}v_0$ 是齐次方程的通解, v^* 是非齐次方程的一个特解。将时间域以步长 Δt 均匀离散, 则 $t = t_{k+1}$ 时刻的解为

$$v_{k+1} = T(v_k - v_k^*) + v_{k+1}^* \quad (7)$$

其中

$$v_k = v(t_k), \quad t_k = t_0 + k\Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, v_k^*$$

是方程在 t_k 时刻的特解, $T = e^{H\Delta t}$ 是传递矩阵。

在有关结构动力方程的精细积分法中, 通解通常用文献 [1-2] 提出的指数矩阵运算方法求得。当荷载为任意形式时, 特解通常可利用数值积分方法计算, 但这种方法的计算量与精度之间存在着突出的矛盾。鉴于此, 本文将给出一种新的特解计算方法。

2 非齐次方程特解的一种差分解法

2.1 动力方程的差分方程

将时间段 (t_k, t_{k+1}) ($k = 0, 1, \dots$) 分成 $(n+1)$

* 收稿日期: 2008-05-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10672194); 广东省自然科学基金资助项目 (031552)

作者简介: 张文志 (1982 年生), 男, 博士生; 通讯联系人: 富明慧; E-mail: stsfmh@mail.sysu.edu.cn

等分, 时间步长为 $h_i = \frac{\Delta t}{(n+1)}$ 。下面为叙述简便起见, 仅以第1个时间段 $(0, t_1)$ 为例加以说明。对 $\ddot{X}$ 采用中心差分:

$$\ddot{X}_i = \frac{X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}}{h_i^2} \quad (8)$$

为便于后面的处理, 可令该区段始、末位移均为零, 即 $X_0 = 0, X_{n+1} = 0$ 。将方程 (1) 改写为如下矩阵形式 (暂不考虑阻尼影响), 有

$$-\frac{1}{h_i^2} M \begin{pmatrix} 2I & -I & & & \\ -I & 2I & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & 2I & -I \\ & & & -I & 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

令

$$D = \frac{1}{h_i^2} \begin{pmatrix} 2I & -I & & & \\ -I & 2I & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & 2I & -I \\ & & & -I & 2I \end{pmatrix}$$

由于形如

$$d = \frac{1}{h_i^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的矩阵, 其特征值、特征向量及特征向量组成的矩阵为^[12]

$$\lambda_k = \frac{4}{h_i^2} \sin^2(k\eta/2), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$q_k = \sqrt{2/(n+1)} (\sin k\eta \quad \sin 2k\eta \quad \dots \sin kn\eta)^T$$

$$q = (q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n) = \sqrt{2/(n+1)} \begin{pmatrix} \sin \eta & \dots & \sin n\eta \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin n\eta & \dots & \sin n^2\eta \end{pmatrix} \left(\eta = \frac{\pi}{n+1} \right)$$

不难验证: q 为正交对称阵, 有 $q = q^T = q^{-1}$ 。显然有

$$d = q^T \begin{pmatrix} \lambda_1 I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n I \end{pmatrix} q$$

同样, 可以验证

$$D = Q^T \begin{pmatrix} \lambda_1 I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n I \end{pmatrix} Q$$

其中

$$Q = \sqrt{2/(n+1)} \begin{pmatrix} \sin \eta I & \dots & \sin n\eta I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin n\eta I & \dots & \sin n^2\eta I \end{pmatrix}$$

利用上述关系, 式 (9) 可化为

$$-\begin{pmatrix} \lambda_1 M & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{X}_{n-1} \\ \tilde{X}_n \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{X}_{n-1} \\ \tilde{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{F}_{n-1} \\ \tilde{F}_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

其中

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_1 & \dots & \tilde{X}_n \end{pmatrix}^T = Q \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_n \end{pmatrix}^T \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1 & \dots & \tilde{F}_n \end{pmatrix}^T = Q \begin{pmatrix} F_1 & \dots & F_n \end{pmatrix}^T$$

式 (10) 可化为

$$(-\lambda_i M + K) \tilde{X} = \tilde{F} \quad (12)$$

式 (12) 共包含 n 个代数方程组, 它们可以独立地求解。由于较大的 λ_k 对应于 Q 的高频分量, 而这些高频分量的影响通常是可以忽略的。这样, 为提高效率, 在求解 (12) 式时, 求解前 l 个 ($l < n$) 方程即可, 其余方程的解均可取为零。求出 $\tilde{X}_i$ 后, 由式 (11) 并考虑到 Q 的正交对称性, 有

$$\begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_n \end{pmatrix}^T = Q \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 & \dots & \tilde{X}_n \end{pmatrix}^T \quad (13)$$

得到 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 后, 由如下差分公式可计算出各结点处的速度

$$\dot{X}_0 = \frac{1}{2h_i} (-3X_1 + 4X_2 - X_3) \quad (14)$$

$$\dot{X}_{n+1} = \frac{1}{2h_i} (3X_n - 4X_{n-1} + X_{n-2})$$

利用时刻 t_k, t_{k+1} 的位移和速度, 就可确定出相应时刻的状态量 v_k^*, v_{k+1}^* , 回代入式 (7), 即可得到 t_{k+1} 时刻的解。

2.2 FFT 快速算法

记

$$G_j = (f_{1j} f_{2j} \dots f_{ij} \dots f_{nj})^T, \quad \tilde{G}_j = (\tilde{f}_{1j} \tilde{f}_{2j} \dots \tilde{f}_{ij} \dots \tilde{f}_{nj})^T \quad (15)$$

$$\Phi_j = (x_{1j} x_{2j} \dots x_{nj})^T, \quad \tilde{\Phi}_j = (\tilde{x}_{1j} \tilde{x}_{2j} \dots \tilde{x}_{nj})^T \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

其中 f_{ij} 为 F_i 的第 j 个元素。

由式 (11) 及式 (13) 不难验证如下关系式

$$\tilde{G}_j = q G_j \quad (17)$$

$$\Phi_j = q \tilde{\Phi}_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (18)$$

式 (15) - (16) 可通过 FFT 实现^[12]。求出 Φ_j 后,

进而得到 X_j 。

求出非齐次方程的数值特解后, 结合精细积分法给出的齐次方程通解, 便可求出满足初始条件的解答了。

本文方法的具体步骤可归纳如下:

- ① 计算传递矩阵 T ;
- ② 利用式 (15)、(17) 计算 $\tilde{G}_i$, 及 $\tilde{F}_i$;
- ③ 求解式 (12) 中的前 l 个方程组, 后面的 $(n-l)$ 个方程组的解均可取为零向量。其中数字 l 根据计算精度的要求而定;
- ④ 由式 (16) 和 (18) 计算出 Φ_j 及 X_i ;
- ⑤ 由式 (14) 计算出速度, 并由此确定出该时间段的状态量 v ;
- ⑥ 由式 (7) 确定出 v_{k+1} , 并返回到步骤 2,

进行下一循环。直接求解式 (12) 中方程的计算量为 $o(n^3)$, 采用 FFT 的计算量为 $o(n \log_2 n)$, 故计算效率大大提高。

3 算 例

算例 1 取自文献 [1], 方程为

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (19)$$

初始条件为

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, & x_2(0) &= 0 \\ \dot{x}_1(0) &= 0, & \dot{x}_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

表 1 为本文计算的 x_1 在 $t = i\Delta t$ ($i = 1, 2, \dots$) 时刻与解析解的对比。其中 $\Delta t = 0.28$, $n = 127$ 。

表 1 算例 1 中 x_1 的结果

Tab. 1 x_1 's results of the example 1

step	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ana	0.003	0.038	0.176	0.486	0.996	1.657	2.338	2.861	3.052	2.806	2.131	1.157
$l=60$	0.003	0.038	0.173	0.480	0.984	1.636	2.309	2.825	3.014	2.771	2.104	1.143
$l=30$	0.002	0.037	0.173	0.478	0.981	1.632	2.303	2.817	3.006	2.763	2.098	1.140
$l=15$	0.002	0.037	0.171	0.473	0.970	1.614	2.278	2.787	2.973	2.734	2.076	1.127

算例 1 表明, l 取值越大, 精度越高, 但计算量越大。当精度要求不是很严格时, 可适当降低 l (如 $l=15$)。 l 的具体取值视问题本身要求精度而定。

算例 2 取自文献 [4], 方程为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0.5 \sin t \end{pmatrix} \quad (21)$$

初始条件为

$$x_1(0) = 2.5, \quad x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = 1.0, \quad \dot{x}_2(0) = 1.0 \quad (22)$$

其解析解为

$$x_1 = 2 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + \frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}t) + \sin t$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - \cos(\sqrt{3}t) + \sin t \quad (23)$$

表 2 为本文计算的位移 x_1 与解析解的对比, 其中 $\Delta t = 1$ 。

表 2 算例 2 中 x_1 的结果

Tab. 2 x_1 's results of the example 2

Time/s	$t=1$	$t=3$	$t=5$	$t=9$	$t=11$	$t=13$
$n=31$	2.2818	-0.5800	-3.1462	1.8883	-0.1911	-1.9595
$n=63$	2.2817	-0.6303	-3.1564	1.8987	-0.2750	-1.9591
$n=127$	2.2817	-0.6515	-3.1615	1.9039	-0.3169	-1.9588
$n=255$	2.2814	-0.6620	-3.1640	1.9065	-0.3378	-1.9587
ana	2.2817	-0.6726	-3.1666	1.9092	-0.3588	-1.9586

算例 2 表明: n 取的越大, 离散误差越小, 但计算量随之增大。 n 的选取视问题要求的精度而定。

4 结 论

本文将精细积分法与快速傅立叶变换结合起

来, 提出了精细积分-FFT 方法。该方法在满足精度的前提下具有效率高的优点, 且避免了精细积分求解逆矩阵的困难, 对非齐次项没有任何限制, 因而具有很好的通用性。数值算例的结果表明了本方法的有效性。

参考文献:

- [1] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(4): 131-136.
ZHONG Wanxie. On precise time-integration method for structural dynamic equations [J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2): 131-136.
- [2] ZHONG W X, WILLIAMS F W. A precise time step integration method [J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1994, 208: 427-430.
- [3] 张洪武. 关于动力分析精细积分法精度的讨论[J]. 力学学报, 2001, 33(6): 847-852.
ZHANG Hongwu. Discussion on the Accuracy of Precise Integration Method in Dynamic Analysis [J]. Acta Mechanica Sinica, 2001, 33(6): 847-852.
- [4] 徐明毅, 张勇全. 精细辛算法的高效格式和简化计算[J]. 力学与实践, 2005, 27(1): 55-57.
XU Mingyi, ZHANG Yongquan. Efficient Format and Simple Computation of Precise Symplectic Integration Method [J]. Mechanics and Engineering, 2005, 27(1): 55-57.
- [5] 林家浩, 钟万勰, 张文首. 结构非平稳随机响应方差矩阵的直接精细积分计算[J]. 振动工程学报, 1999, 12(1): 1-8.
LIN Jiahao, ZHONG Wanxie, ZHANG Wenshou. Precise Integration of the Variance Matrix of Structural Non Stationary Random Responses [J]. Journal of Vibration Engineering, 1999, 12(1): 1-8.
- [6] 王忠, 王雅琳, 王芳. 任意激励下结构动力响应的状态方程精细积分法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(4): 419-422.
WANG Zhong, WANG Yalin, WANG Fang. A High Precise Integration Scheme for Structural Dynamics Analysis under Arbitrary Excitation [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(4): 419-422.
- [7] 林家浩, 曲乃泗, 孙焕纯. 计算结构动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989: 08-39.
- [8] 顾元宪, 陈飏松, 张洪武. 结构动力方程的增维精细积分法[J]. 力学学报, 2000, 32(4): 447-456.
GU Yuanxian, CHEN Biaosong, ZHANG Hongwu. Precise time-integration with dimension expanding method [J]. Acta Mechanica Sinica, 2000, 32(4): 447-456.
- [9] GU Y X, CHEN B S, ZHANG H W, et al. Precise time-integration method with dimensional expanding for structural dynamic equations [J]. AIAA Journal, 2001, 39(12): 2394-2399.
- [10] 汪梦甫, 周锡元. 结构动力方程的更新精细积分法[J]. 力学学报, 2004, 36(2): 191-195.
WANG Mengfu, ZHOU Xiyuan. Renewal precise time step integration method of structural dynamic analysis [J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36(2): 191-195.
- [11] 富明慧, 刘祚秋, 林敬华. 一种广义精细积分法[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 672-677.
FU Minghui, LIU Zuoqiu, LIN Jinghua. A generalized precise time step integration method [J]. Acta Mechanica Sinica, 2007, 39(5): 672-677.
- [12] SAMARSKII A A, NIKOLAEV E S. Numerical methods for grid equations [J]. Berlin: Basel Boston, 1989: 1-502.

Precise Integration-FFT Method for Structural Dynamics

ZHANG Wen-zhi, FU Ming-hui, LIU Zuo-qiu

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 10275, China)

Abstract: A precise time integration-FFT method applied for linear time-invariant dynamic system is presented. The initial-value problem is formally transformed into a boundary-value problem through discretizing the structural dynamic equation and assuming the two ends of time displacement is known. A new method has high precision and efficiency to solve the structural dynamic equation is obtained by combining the numerical particular solution of non-homogeneous equation solved by fast Fourier transform (FFT) with the general solution of homogeneous equation obtained by precise integration method (PIM). Numerical examples show the validity of the present method.

Key words: structural dynamics; precise integration method (PIM); difference equation; fast Fourier transform (FFT)